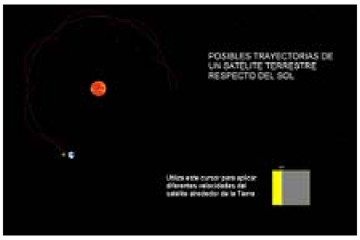
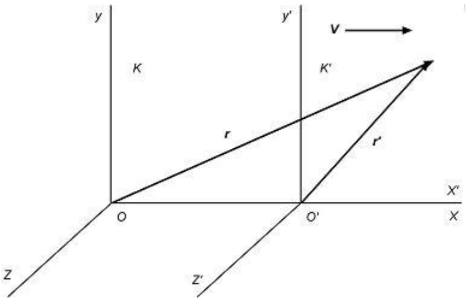
CONCEPTOS DE RELATIVIDAD

LEYES DE TRANSFORMACIÓN RELATIVISTAS

El estado y el tipo de movimiento de cualquier objeto depende del sistema de referencia (SR) adoptado para estudiarlo. Por ejemplo, un satélite con un movimiento circular alrededor de la Tierra, describe una trayectoria mucho más complicada respecto del Sol, tal como muestra una animación interactiva *Modellus* elaborada por nosotros.



El reto de la relatividad consiste en la búsqueda de unas leyes únicas para el estudio de los movimientos y, al mismo tiempo, capaces de proporcionar descripciones diferentes de cualquier movimiento según cual sea el SR que se adopte. Observadores situados en SR distintos (en este ejemplo, en la Tierra o en el Sol) han de poder utilizar esas leyes compartidas para estudiar cada movimiento (como el del satélite), pero, al hacerlo, cada uno obtendrá un valor distinto de magnitudes relativas, como son la posición y la velocidad. Además de poseer esa capacidad extraordinaria de adaptación de las leyes a cada SR, una teoría relativista debe incluir un conjunto adicional de ecuaciones adecuado para trasladar los valores de las magnitudes que caracterizan a cada movimiento al pasar de un SR a otro. ¿Cómo podrían, si no, sus usuarios (en SR distintos) intercambiar sus datos, mediciones, predicciones,..?



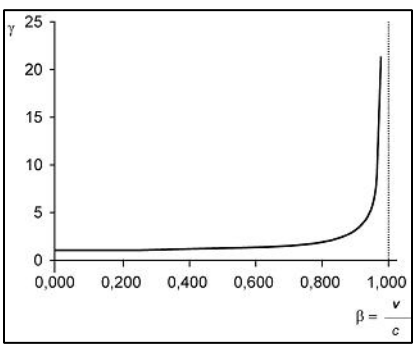
En la relatividad especial, este conjunto de ecuaciones son las leyes de transformación Lorentz-Einstein, que relacionan las coordenadas de posición y tiempo de un móvil en el SRI, K (*x, y, z, t*) con las mismas coordenadas en otro SRI, K' (*x′, y′, z′, t′*), con velocidad, v, respecto de K.

$$x'=\gamma(x-vt) \qquad y'=y \qquad z'=z \qquad t'=\gamma\left(t-\frac{v}{c^2}x\right) \qquad \gamma=\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

Tomando derivadas en estas ecuaciones se obtienen las leyes de transformación de las velocidades.

$$u'_x=\frac{u_x-v}{\left(1-\frac{v}{c^2}u_x\right)} \qquad u'_y=\frac{u_x-v}{\left(1-\frac{v}{c^2}u_y\right)} \qquad u'_z=\frac{u_x-v}{\left(1-\frac{v}{c^2}u_z\right)}$$

El factor γ que aparece en las leyes de transformación de Lorente-Einstein depende del cociente entre la velocidad relativa de los SR, v, y la velocidad de la luz, *c*, tal como indica la fórmula escrita un poco más arriba. Este factor tiende a la unidad cuando la velocidad de la luz es pequeña comparada con la velocidad, *c*. En ese caso, las leyes de transformación relativistas apenas se diferencian de las de la mecánica clásica. Por eso la mayoría de experiencias cotidianas (como un viaje en tren o en avión) que se producen con velocidades mucho menores que *c* no ponen en evidencia propiedades relativistas diferenciadas de las aproximaciones de la física clásica. La figura adjunta refleja el hecho de que para que estos efectos se pongan de manifiesto, la velocidad relativa entre los SRI tiene que alcanzar valores muy elevados.



En cambio, en la física nuclear y la física de partículas, por ejemplo, estas grandes velocidades son habituales (las radiaciones y los "vuelos" de partículas subatómicas alcanzan velocidades ordinarias próximas a la velocidad de la luz, *c*).

EL ESPACIO-TIEMPO

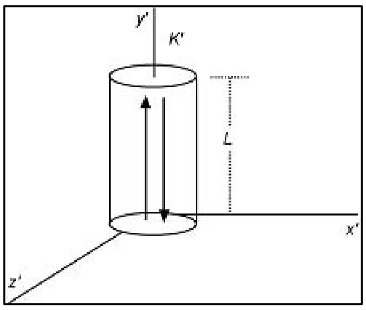
La existencia de un límite superior de velocidad, c (la velocidad de la luz en el vacío), nos introduce a un concepto central del mundo relativista, al que llamamos espacio-tiempo. Piénsese en un vehículo con una velocidad muy elevada. El cociente entre los desplazamientos espaciales que realice y los correspondientes intervalos de tiempo es su velocidad media en cada intervalo de tiempo considerado. Como el vehículo no puede alcanzar el límite superior de velocidad, este cociente no puede tomar cualquier valor arbitrariamente grande. Por tanto, las distancias espaciales y los intervalos temporales correspondientes del movimiento de ese objeto no pueden tener valores independientes entre sí. Los intervalos de tiempo y las distancias espaciales son interdependientes, poniendo de manifiesto que espacio y tiempo son conceptos interrelacionados y que dependen del sistema de referencia (SR), en lugar de ser absolutos como suponía la mecánica newtoniana y nuestro "sentido común".

Se ha detener en cuenta además que la velocidad es una magnitud relativa, es decir, diferente según el SR adoptado (un cuerpo en reposo encima de la superficie de la Tierra tiene una velocidad aproximada de *30km/s* respecto del Sol, de unos *250km/s* respecto de la galaxia más próxima a la nuestra y de miles de *km/s* respecto de otras galaxias). Por tanto, como la velocidad de un cuerpo no es una propiedad de él, sino que depende del SR, la relación de interdependencia entre los desplazamientos espaciales y los correspondientes intervalos de tiempo, es una propiedad del mundo (del espacio-tiempo)

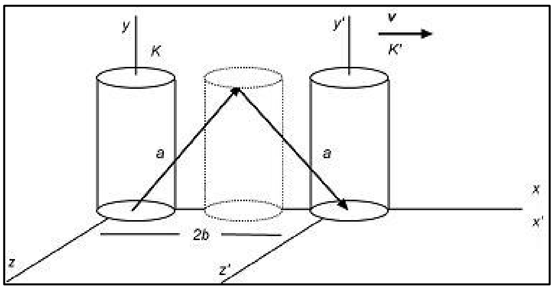
En resumen, la relatividad especial se sustenta sobre un nuevo concepto del espacio-tiempo, distinto del tradicional concepto de un espacio en el que se suponía que se podían medir distancias o longitudes absolutas y donde además se consideraba que se podían referir los procesos a un tiempo externo y también absoluto. El espacio-tiempo relativista tiene que contemplar una dependencia mutua entre las longitudes y los tiempos que exige la existencia de un límite superior de velocidades.

DILATACIÓN DE TIEMPOS

Una consecuencia del entramado espacio-tiempo es la llamada ley de dilatación de tiempos. Para deducirla usamos relojes de luz: unos artificios imaginarios de forma cilíndrica que tienen en su base y en su tapa de dos espejos plano-paralelos y marcan una unidad de tiempo "tic-tac" cada vez que un haz luminoso viaja de la base a la tapa (dónde se refleja) y vuelve otra vez a la base. En la figura adjunta, hemos colocado uno de estos relojes, de altura L en un sistema de referencia inercial (SRI) K' (que se desplaza con velocidad respecto de otro SRI K). Para ese SRI (K'), el desplazamiento realizado por el rayo luminoso al marcar una unidad de tiempo ocurre en dirección vertical y coincide, en la ida más la vuelta, con el doble de la altura del reloj. Por tanto, se cumple la relación $2L = c\Delta t'$



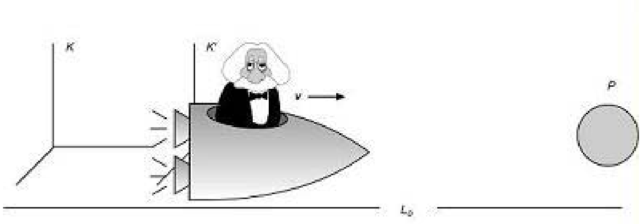
En el SRI, K ese mismo reloj de luz se desplaza con una velocidad horizontal, v, y el rayo luminoso realiza un desplazamiento oblicuo para marcar una unidad de tiempo. El camino recorrido por el haz es: $2a=c\Delta t$ y el camino recorrido por el reloj es: $2b= v\Delta t$. Después de usar el teorema de Pitágoras en el triángulo de la figura para relacionar los intervalos de tiempo, Δt y $\Delta t'$, se obtiene la llamada ley de dilatación del tiempo: $\Delta t = \gamma \Delta t'$

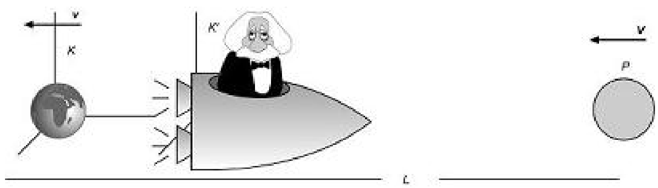


Al intervalo de tiempo de un proceso físico, cuyo origen y final ocurren en la misma posición de un SRI se le denomina tiempo propio. Al intervalo de tiempo de ese mismo proceso, obtenido en cualquier otro SRI, para el cual el origen y final ocurren en dos lugares distintos, se le denomina tiempo impropio de ese proceso. Puesto que el factor γ es mayor que la unidad, la ley de dilatación del tiempo dice que cualquier intervalo de tiempo impropio de un proceso es mayor que el correspondiente intervalo de tiempo propio de ese mismo proceso.

CONTRACCIÓN DE LONGITUDES

El reverso de la moneda de la ley de dilatación del tiempo es la denominada ley de contracción de longitudes. Para deducirla, imaginamos el viaje de una nave, N, entre la Tierra , T, y un planeta lejano, P. Suponemos que la separación espacial entre la Tierra y el planeta se mantiene fija, y que el viaje de la nave se realiza a una determinada velocidad de crucero constante, es decir, con movimiento rectilíneo y uniforme.





En el SRI ligado a la Tierra, el viaje de la nave se interpreta como indica el dibujo de la izquierda, de forma que la distancia, L_T, entre la Tierra y el planeta P, es la longitud del viaje que realiza la nave (a la velocidad v). Es decir: $v = L_T/\Delta t_T$. En cambio, el SRI ligado a la nave se interpreta que la nave está en reposo y que son la Tierra y el planeta los que avanzan en sentido opuesto a la misma velocidad v, según indica el dibujo de la derecha. En este SRI, relacionamos la longitud del viaje con esa velocidad de desplazamiento de la Tierra y el planeta respecto de la nave: $v = L_N/\Delta t_N$.

Después de igualar expresiones y tener en cuenta la ley de dilatación de tiempos, se obtiene la siguiente relación entre las longitudes del viaje medidas en cada SRI:

$$L_T/\Delta t_T = L_N/\Delta t_N \quad \rightarrow \quad L_T/L_N = \Delta t_T/\Delta t_N = 1/\gamma$$

Llamamos longitud propia de un movimiento a la longitud del mismo según el punto de vista de un SRI en el que las posiciones extremas están en reposo relativo (en este ejemplo la que se obtiene en el SRI ligado a la Tierra) y longitud impropia de ese mismo movimiento a la que se obtiene según el punto de vista de los viajeros, que se consideran en reposo (en este caso, en el SRI ligado a la nave). Por tanto, la ley que relaciona la longitud propia e impropia es:

$$L_T = L_N/\gamma \text{ (ley de contracción de longitudes)}$$

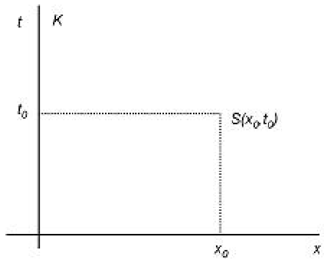
Es decir, cualquier medida de la longitud impropia de un movimiento es menor que la longitud propia de ese mismo movimiento.

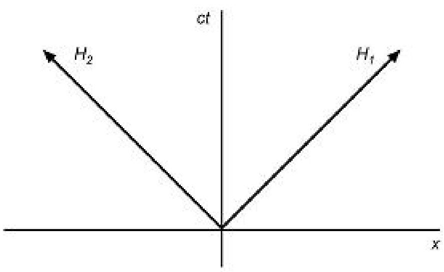
Es importante entender que la dilatación de tiempos y la contracción de longitudes son dos aspectos de un mismo hecho físico. En el ejemplo que acabamos de ver, un observador terrestre interpreta que el viaje de la nave tiene mayor duración de la que tiene para los astronautas (dilatación de tiempos). Los viajeros interpretan el mismo hecho como una contracción de la longitud del viaje que les permite al planeta llegar antes -según su medida del tiempo- de lo que llegan según la medida del tiempo de los observadores terrestres.

DIAGRAMAS ESPACIO-TIEMPO DE MINKOWSKI

Ahora vamos a llamar suceso a acontecimiento físico a un hecho puntual que ocurre en un cierto lugar y un cierto instante, sin que llegue a transcurrir tiempo. De acuerdo con esta definición, un suceso se determina dando en un sistema de referencia inercial (SRI) cuatro valores: las coordenadas espaciales (*x, y, z*) que proporcionan su posición y la coordenada temporal, *t*. Por consiguiente, el modo de representar sucesos en un sistema de ejes de coordenadas debería ser construir un diagrama posición-tiempo de cuatro dimensiones. Para hacer la representación más sencilla reducimos el análisis a una única coordenada espacial, *x,* y la coordenada temporal, *t*.

Tenemos así representaciones de sucesos y de procesos físicos sobre dos ejes (*x, t*) similares a las gráficas del movimiento que se utilizan de forma habitual para describir movimientos en la física clásica, salvo una diferencia: en relatividad es costumbre representar la posición en el eje vertical (ordenadas) y el tiempo en el eje horizontal (abcisas), tal como indica la figura adjunta en la que se ha representado un suceso S de coordenadas (x_o, t_o).

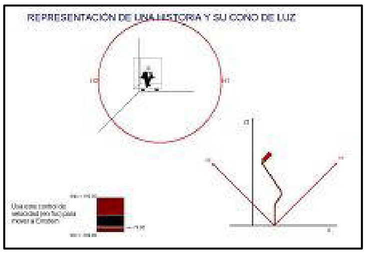




Al exigir el cumplimiento de los postulados de la relatividad especial, estos diagramas espacio-tiempo adquieren un perfil particular y proporcionan unas conclusiones coherentes con esta teoría y completamente diferenciadas de las predicciones de la mecánica clásica. Para comprobarlo, consideramos primero la representación de un haz de luz emitido por una bombilla situada en el origen de coordenadas de un cierto SRI K (*x, t*). De acuerdo con las predicciones relativistas la onda electromagnética correspondiente a ese haz luminoso se propaga en todas las direcciones a la velocidad *c*. Por lo tanto, la representación de la historia del haz en el diagrama ha de reflejar el avance de dos extremos del mismo, H_1 y H_2, a dicha velocidad *c*, respectivamente en el sentido positivo y en el sentido negativo del eje *X*. Graduando el eje de tiempos como *ct* (esto se hace con objeto de usar la dimensión espacial y una misma unidad en todos los ejes), esta representación queda como se muestra en la figura adjunta.

Esta representación tiene más importancia de la que pueda parecer a primera vista, debido a que *c*, además de ser la velocidad de la luz, es el límite superior de velocidad que ningún objeto material puede alcanzar. Así pues, cuando trazamos la curva representativa de otro movimiento cualquiera que también comience ahí, como por ejemplo, el de una persona que en ese lugar encendió la lámpara, hemos de tener en cuenta que dicha curva se tiene que ubicar en el interior de la zona que delimitan las historias de las puntas H_1 y H_2 del haz de luz pues su velocidad siempre es inferior a la velocidad límite *c*. Además, su pendiente, respecto del eje vertical de tiempos, ha de tener en todos los puntos un valor inferior a las pendientes de las rectas OH_1 y OH_2.

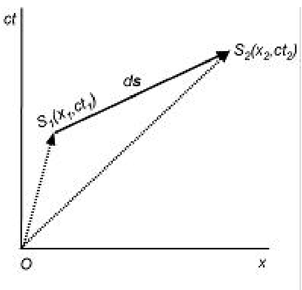
Para practicar este concepto fundamental hemos diseñado una animación *Modellus* que permite mover a voluntad un "Einstein viajero" y comprobar que la representación de su viaje queda necesariamente dentro del "cono de luz". Entrando en la ventana del modelo físico-matemático de la animación se constata que este comportamiento del diagrama es consecuencia de la existencia del límite superior de velocidades, *c*.



El matemático Herman Minkowski, antes profesor de Einstein y luego admirador de su obra, fue quien primero planteó estos diagramas y mostró sus potentes aplicaciones.

INTERVALO INVARIANTE ESPACIO-TIEMPO

Tomando como punto de partida las leyes de transformación de Lorentz-Einstein, se demuestra que la cantidad *ds*, definida de tal modo que $(ds)^2 = (cdt)^2-(dx)^2-(dy)^2-(dz)^2$, es una magnitud invariante en relatividad. Esto significa que esta cantidad tiene el mismo valor en cualquier SRI y se escribe igual en todos ellos. Atribuimos a esta magnitud, *ds*, el significado de *un intervalo o una distancia en el espacio-tiempo relativista*, y, atendiendo a esta interpretación, decimos que un vector de cuatro componentes, **ds** (lo llamamos cuadrivector espacio-tiempo) con origen en un punto (x_1, y_1, z_1, ct_1) y final en el punto (x_2, y_2, z_2, ct_2) del espacio-tiempo cumple que el cuadrado de su módulo $(ds)^2$ es una cantidad absoluta o invariante en valor y en forma. En la figura adjunta se representa un cuadrivector espacio-tiempo considerando una sola componente espacial, *x*.



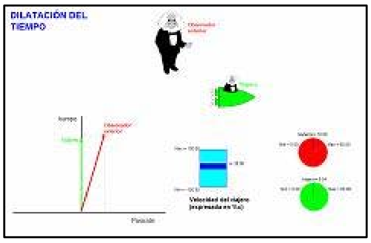
Este concepto evidencia que, lo que describe los hechos en relatividad, con independencia de las mediciones particulares en cada SRI, son intervalos en el espacio-tiempo de cuatro dimensiones. Las distintas longitudes y duraciones que se obtienen en cada SRI particular, indican diferentes maneras de descomponer un mismo intervalo cuatri-dimensional en sus proyecciones de espacio (tres dimensiones) y tiempo (la otra dimensión). Teniendo en cuenta este concepto, hechos como la dilatación del tiempo o la contracción de la longitud, se pueden mostrar de forma muy sencilla y visual mediante el manejo de los diagramas (representando en ellos del intervalo invariante espacio-tiempo).

Para hacer correctamente estas representaciones hay que tener el signo negativo que aparece en la expresión del cuadrado del módulo (invariante) del cuadrivector espacio-tiempo:

$$(ds)^2 = (cdt)^2 - (dx)^2$$

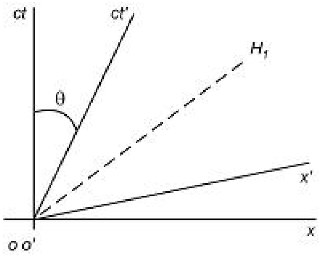
Este signo negativo aporta a los cuadrivectores una métrica especial, que hemos de tener en cuenta al dibujarlos.

Para trabajar estos conceptos hemos elaborado una animación *Modellus* que plantea el viaje de una nave tripulada y dibuja en un diagrama de Minkowski el cuadrivector invariante espacio-tiempo según el punto de vista del viajero y el de un observador en reposo. Así se pone en evidencia la diferencia entre el tiempo propio y el tiempo impropio del viaje. Entrando en el modelo físico-matemático de la animación se comprueba que todo esto es consecuencia de la invariancia del intervalo espacio-tiempo.

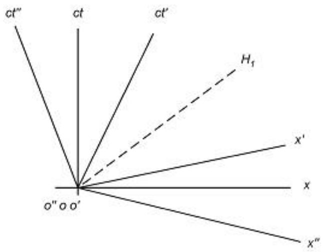


DIAGRAMAS CINEMÁTICOS MÚLTIPLES

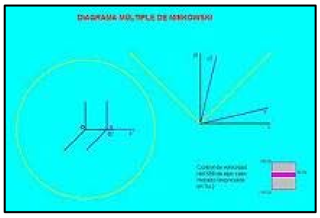
Después de dibujar los ejes (*x, ct*) del diagrama espacio-tiempo, según el punto de vista de un SRI, K, podemos incorporar en el mismo dibujo los ejes (*x', ct'*) de otro SRI K', que se desplace con una velocidad *v* respecto de K. Para hacerlo tenemos en cuenta que la historia del origen O' del SRI K' es, según el punto de vista del SRI K, el eje de tiempos *ct'*. Esto es así porque dicho origen O' está, para todo tiempo *t'*, en la posición *x'=0*. Una vez dibujado ese eje temporal *ct'*, utilizamos el hecho de que la luz tiene la misma velocidad c en ambos SRI para añadir al diagrama el eje espacial x'. Un haz de luz que se emita en el instante *t=t'=0* en el que coinciden ambos orígenes, *x=x'=0*, tiene la velocidad *c* en ambos SRI. Por ello, el eje espacial *x'* ha de ser simétrico al eje temporal *ct'*, para que el extremo del haz de luz, H_1, sea la bisectriz del diagrama respecto de los ejes de ambos SRI.



Utilizando este procedimiento se pueden incorporar cuantos SRI se desee al diagrama. El eje temporal de un SRI K' que avance en sentido positivo del eje x del SRI K se inclina hacia la derecha del dibujo en esta representación abstracta (tiene una inclinación mayor o menor, respecto del eje temporal *ct* del SRI K, según sea mayor o menor la velocidad del SRI en cuestión respecto de K). Para otro SRI K'' que avance en sentido negativo del eje x del SRI K, su eje temporal se inclina hacia la izquierda del dibujo. En todos los casos, el correspondiente eje espacial se dibuja respetando el hecho de que los extremos del haz de luz a que nos hemos referido en el párrafo anterior sean bisectriz de los ejes de los SRI.



Para practicar este procedimiento de construcción de los diagramas múltiples, hemos elaborado una animación *Modellus* interactiva.



MAGNITUDES DE LA DINÁMICA DE UNA PARTÍCULA

Ante la importancia para la cinemática relativista del desplazamiento espacio-tiempo, **ds**, en dinámica definimos otro cuadrivector, **P**, como producto de la masa de la partícula por una velocidad en el espacio-tiempo, que llamamos cuadri-velocidad. La cuadri-velocidad es el cociente entre el desplazamiento espacio-tiempo (**ds**) y el tiempo propio (dt_0) correspondiente a ese desplazamiento:

$$\mathbf{P} = m\frac{\mathbf{ds}}{dt_0}$$

Como la masa *m* y el intervalo de tiempo propio dt_0 son constantes, el cuadrivector dinámico, **P**, y el cuadrivector cinemático espacio-tiempo, **ds**, son proporcionales.

Teniendo en cuenta la expresión del desplazamiento espacio-tiempo, las componentes del cuadrivector dinámico son:

$$\mathbf{P} = \left(mc\frac{dt}{dt_0}, m\frac{dx}{dt_0}, m\frac{dy}{dt_0}, m\frac{dz}{dt_0} \right)$$ o, considerando una sola componente espacial: $$\mathbf{P} = \left(mc\frac{dt}{dt_0}, m\frac{dx}{dt_0} \right)$$

Aplicamos la ley de dilatación de tiempos ($dt=\gamma dt_0$) y la expresión de la velocidad de la partícula ($v=dx/dt$) para escribir:

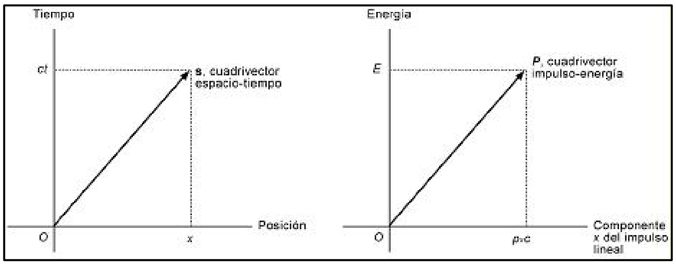
$\mathbf{P} = (mc\gamma, m\gamma\mathbf{v})$ ó, multiplicando por la constante c: $\mathbf{P}\cdot c = (mc^2\gamma, m\gamma\mathbf{v}c)$

Se ha de observar que **P** tiene dimensiones de impulso, y $\mathbf{P}\cdot c$ tiene dimensiones de energía. Por eso se identifica la primera componente del cuadrivector (escalar) con la energía total de la partícula, *E*, y la segunda componentes (vectorial) con un impulso lineal relativista **p**. Todo lo cual conduce a las siguientes definiciones de las magnitudes dinámicas relativistas:

Cuadrivector impulso energía	P= (E, p·c) (en unidades de energía)
Energía	$E = mc^2\gamma$
Impulso	p= $m\gamma$**v**

RELACIÓN ENTRE LOS CUADRIVECTORES IMPULSO-ENERGÍA (DINÁMICO) Y ESPACIO-TIEMPO (CINEMÁTICO)

Recordemos que el cuadrivector espacio-tiempo se representa en un diagrama de Minkowski de ejes posición-tiempo (x, ct). El cuadrivector dinámico se representa de forma análoga sobre un diagrama de ejes impulso-energía (p_x·c, E), como muestra la figura adjunta.



Considerando una sola componente espacial, la expresión vectorial del cuadrivector espacio-tiempo es ***ds* = *(cdt, dx)*** y la del cuadrivector impulso-energía es ***P* = *(E, p_x·c)*** Como ambos cuadrivectores son proporcionales los cocientes entre sus componentes son iguales, es decir, se verifica $dx/cdt = p_xc/E$. Como la velocidad **v** de la partícula es $v = dx/dt$ o $v = (dx/cdt)c$, se deduce la siguiente relación entre dicha velocidad y las magnitudes dinámicas:

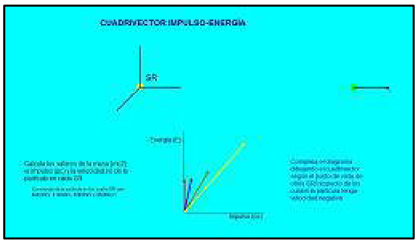
$$\mathbf{v} = \frac{\mathbf{p}\cdot c}{E}c$$

Esta ecuación es una ley básica de la dinámica de una partícula en relatividad.

REPRESENTACIÓN DEL CUADRIVECTOR IMPULSO-ENERGÍA.

Recordamos que el módulo del cuadrivector cinemática espacio-tiempo es una cantidad invariante en relatividad. Como el cuadrivector dinámico impulso energía es proporcional al cuadrivector cinemática, el módulo del cuadrivector impulso energía también es una cantidad invariante. En unidades de energía, la expresión del cuadrado del módulo de cuadrivector **P** (E, p·c) es:

$$P^2 = E^2 - (p \cdot c)^2$$



Igual que ocurre con el cuadrivector espacio-tiempo, el signo negativo que aparece en esta expresión aporta a los cuadrivectores que representan el impulso-energía una métrica especial y semejante a la de los cuadrivectores espacio-tiempo. Para favorecer la familiarización con estas representaciones hemos diseñado una animación *Modellus* interactiva.

Los diagramas impulso energía son de mucha utilidad para comprender algunas propiedades de las magnitudes de dinámica relativista (por ejemplo, el carácter no aditivo de la masa en relatividad) y para plantear y resolver problemas que involucran a sistemas de partículas en procesos de alta energía (colisiones, procesos de absorción y/o emisión de luz por átomos, procesos de aniquilación de partículas,..)

LEY FUNDAMIENTAL DE LA DINÁMICA Y OTRAS EXPRESIONES

Ya hemos visto que el cuadrivector **P**, y el cuadrivector cinemático espacio-tiempo, **ds**, son proporcionales. También lo son los cuadrados de sus módulos, es decir, P^2 y $(ds)^2$. Por tanto, la cantidad P^2 es invariante, como lo es $(ds)^2$, y podemos elegir cualquier SRI para calcularla. Elijamos el SR propio de la partícula. Ahí resulta que **p**=0 y que γ=1 (la velocidad de la partícula es cero en su SR propio). Por tanto, obtenemos:

$$P^2 = (mc^2)^2 \ (1)$$

La manera de expresar P en función de sus componentes [**P**= (E, **p**·c)] nos recuerda al mismo tiempo que:

$$P^2=E^2-(\mathbf{p} \cdot c)^2 \ (2)$$

Igualando las expresiones (1) y (2), se obtiene la siguiente relación entre la masa, la energía y el impulso de una partícula en relatividad:

$$(mc^2)^2 = E^2-(\mathbf{p} \cdot c)^2$$

Llamamos a esta expresión *ley fundamental de la dinámica relativista de una partícula*.

Combinando esta ley fundamental con las definiciones de las tres magnitudes (impulso, energía e impulso-energía) se obtienen el resto de expresiones que recogemos en la tabla que a parece en la página siguiente. Así, por ejemplo, tenemos que en el SRI propio de la partícula, su impulso es cero, de donde se deduce la relación de equivalencia entre la masa y la energía (propia) Del mismo modo, podemos aplicar la ley fundamental a entidades sin masa (fotones), lo que conduce a la relación entre la energía y el impulso lineal de la luz.

A quienes estén interesados en los aspectos formales de la teoría, les proponemos que comprueben a partir de las expresiones de la tabla que las magnitudes de la dinámica relativista tienden hacia sus homólogas de la mecánica clásica en el caso extremo de considerar velocidades muy pequeñas respecto del límite superior, c. También pueden confirmar la coherencia interna entre este conjunto de expresiones dinámicas, viendo que todas ellas se pueden relacionar directamente con la ley fundamental.

Magnitudes de la dinámica relativista	
Cuadrivector impulso-energía	**P**= (E, **p**·c) en unidades de energía
Impulso lineal	p= $m\gamma$**v**
Energía	$E = m\gamma c^2$
Relación entre el cuadrado del módulo de P y la masa m (en unidades de energía)	$P^2=(mc^2)^2$
Ley fundamental de la dinámica relativista	$(mc^2)^2=E^2-(p\cdot c)^2$
Relación entre la velocidad, la energía y el impulso lineal	$\mathbf{v} = \frac{\mathbf{p}\cdot c}{E}c$
Equivalencia entre la masa y la energía (propia)	$E_0=mc^2$
Energía cinética	$E_c=E-E_0$
Relación entre la energía y el impulso lineal de entidades de masa nula (fotones)	$E=p\cdot c$

SISTEMAS DE PARTÍCULAS

Un sistema es un conjunto de entidades corpusculares (partículas con masa como electrones, neutrones, protones o también fotones) que, eventualmente, pueden o no interaccionar entre sí. Los sistemas que pueden adecuarse a esta definición (por ejemplo, un átomo) a menudo componen otros sistemas más complejos (como una molécula); estos, a su vez, componen otros aún más complejos (como un gas), etc. Por ello, el proceso de extensión de los conceptos físicos a los sistemas ha de garantizar que globalmente se les pueda considerar a su vez como nuevas entidades individuales caracterizables con las mismas magnitudes que utilizamos para estudiar a las partículas simples. Es decir, en dinámica relativista un sistema tiene, como tienen las partículas, una masa, m, un impulso lineal, **p**, una energía, E y un impulso energía, **P**.

El impulso-energía de un sistema, $\mathbf{P}_{sistema}$, se calcula sumando los impulsos-energía de cada componente $\mathbf{P}_1$, $\mathbf{P}_2$, $\mathbf{P}_3$, etc., más un término adicional que tiene en cuenta posibles flujos de energía en forma de campo. Es decir:

$$\mathbf{P}_{sistema} = \mathbf{P}_1 + \mathbf{P}_2 + \mathbf{P}_3 + \ldots + \text{Término adicional.}$$

Para el estudio de problemas que requieren tener en cuenta este término adicional es necesario entrar en el dominio de la teoría de campos. No obstante, es posible acotar un conjunto amplio de problemas en los que la energía radiada tiene por soporte los cuantos asociados al campo correspondiente (por ejemplo, fotones si se trata de radiación electromagnética). En estos casos todos los flujos de energía son asimilables a flujos de entidades corpusculares, con lo que omitimos el término adicional y utilizamos una expresión simple del impulso-energía de un sistema igual a la suma de los impulsos-energía de cada uno de sus componentes corpusculares:

$$\mathbf{P}_{sistema} = \mathbf{P}_1 + \mathbf{P}_2 + \mathbf{P}_3 + \ldots$$

La suma de los cuadrivectores se efectúa sumando respectivamente sus componentes de energía e impulso lineal. Por lo tanto, resulta de esta definición que la energía del sistema, E, es igual a la suma de las energías de los componentes y que el impulso lineal del sistema, **p**, también es igual a la suma de los impulsos lineales de los componentes.

$$E_{sist} = \Sigma E_i \qquad\qquad \mathbf{p}_{sist} = \Sigma \mathbf{p}_i$$

Es decir, la energía y el impulso relativistas son, igual que ocurre en la mecánica clásica, magnitudes aditivas.

Por otra parte, puesto que el sistema es una nueva entidad física, se le puede aplicar la ley fundamental de la dinámica:

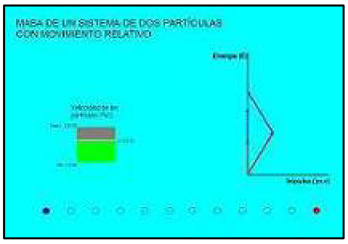
$$(m_{sist} \cdot c^2)^2 = E_{sist}^2 - (\mathbf{p}_{sist} \cdot c)^2$$

Para ello se exige que la masa del sistema, m_{sist}, se relacione con su impulso-energía, $\mathbf{P}_{sist}$, del mismo modo que lo hace la masa de una partícula con su impulso-energía, es decir:

$$P_{sistema}^2 = (m_{sistema} \cdot c^2)^2$$

Mencionamos para terminar una consecuencia notable de este procedimiento de generalización de las leyes de la dinámica relativista a sistemas de partículas: En general, la suma de las masas individuales de las entidades componentes de un sistema no es igual a la masa del sistema entero.

Hemos elaborado una animación *Modellus* que representa el comportamiento dinámico de un sistema de dos partículas de igual masa en movimiento relativo. Mientras las partículas se separan, se dibujan los cuadrivectores impulso-energía en el SRI respecto del cual se alejan y en los SRI propios de cada una de ellas. Se comprueba así que la masa del sistema de las dos partículas libres (módulo del cuadrivector impulso-energía del sistema) es mayor que la suma de las masas de dichas partículas (suma de módulos de los cuadrivectores)



Así ocurre, por ejemplo, que la masa de un gas es mayor que la suma de las masas de sus moléculas, tanto mayor cuanto mayor sea la temperatura del gas (relacionada con la velocidad media de las moléculas). También se deduce de esto que calentar el gas significa aportarle energía interna y una masa equivalente a esa energía aportada.

Los experimentos, materiales y referencias citadas en este documento están disponibles en la página dedicada a Teoría y problemas resueltos de Relatividad (http://intercentres.edu.gva.es/iesleonardodavinci/Fisica/Problemas-relatividad/problemas-relatividad.htm) dentro de la web del Departamento de Física y Química del IES "Leonardo Da Vinci" de Alicante (http://intercentres.edu.gva.es/iesleonardodavinci/Fisica/fisica.htm) También puedes solicitar a los autores (manuelalonso@inicia.es) un CD gratuito con el trabajo "Materiales interactivos para la enseñanza de la relatividad" (1º Premio en Ciencia en Acción 2005) y/o el libro "Construyendo la Relatividad".